Közgazdaságtani problémák a valószínűségszámításban és az analízisben

Nyul Balázs
(Témavezetők: Dr. Pap Gyula és Dr. Gáll József)

Informatikai Kar - PhD konferencia
Hollókő
2013. április 4-5.

1. **Termelési függvények és jellemzéseik**

2. **Optimális portfóliók**

3. **Paraméterbecslés kamatlábmodellekben**

4. **Függvényegyenletek kvaterniókra**

1. Termelési függvények és jellemzéseik

Definíció. *Egy* $P :]0, +\infty[^n \longrightarrow]0, +\infty[$ *függvényt* ***termelési függvény****nek nevezünk.*

Definíció. *Legyen* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Ekkor az* $F :]0, +\infty[^n \longrightarrow]0, +\infty[$ *függvényt* α***-adfokú homogén****nek nevezzük, ha minden* $(x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n$ *és* $\lambda > 0$ *esetén* $F(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha F(x_1, \ldots, x_n)$. *Ha* $\alpha = 1$, *akkor az* F *függvényt* ***homogén****nek nevezzük.*

Definíció. *Legyen* $P :]0, +\infty[^n \longrightarrow]0, +\infty[$ *egy kétszer differenciálható termelési függvény, melyre* $\partial_k P(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ *minden* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *és* $(x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n$ *esetén. Ekkor feltéve, hogy a nevezőben levő kifejezés nem egyenlő* 0*-val,*

$$ES_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{\frac{1}{\partial_i P(x_1,\ldots,x_n)\cdot x_i} + \frac{1}{\partial_j P(x_1,\ldots,x_n)\cdot x_j}}{\frac{\partial_i^2 P(x_1,\ldots,x_n)}{(\partial_i P(x_1,\ldots,x_n))^2} - 2\frac{\partial_i \partial_j P(x_1,\ldots,x_n)}{\partial_i P(x_1,\ldots,x_n)\cdot \partial_j P(x_1,\ldots,x_n)} + \frac{\partial_j^2 P(x_1,\ldots,x_n)}{(\partial_j P(x_1,\ldots,x_n))^2}}$$

$$((x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n)$$

az i***-edik termelési tényező*** j***-edik*** $(i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j)$ ***termelési tényezőre vonatkozó helyettesítési rugalmassága*** *(elasticity of substitution).*

Definíció. *Egy* $P :]0, +\infty[^n \longrightarrow]0, +\infty[$ *kétszer differenciálható termelési függvény teljesíti a* ***CES-tulajdonságot*** *(constant elasticity of substitution), ha minden* $(x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n$ *esetén* $ES_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$ *létezik és valamilyen* $c \in \mathbb{R}$*-re* $ES_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = c$ *minden* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$ *esetén.*

Definíció. *A* $P :]0, +\infty[^n \longrightarrow]0, +\infty[$ *termelési függvény* ***Cobb-Douglas-típusú (CD-típusú) termelési függvény****, ha*

$$P(x_1, \ldots, x_n) = C x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n},$$

ahol $C > 0$, $\alpha_1 \neq 0, \ldots, \alpha_n \neq 0$ *olyan valós számok, hogy* $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0.$

Megjegyzés. $ES_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = 1$ $(i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j)$, *így a CD-típusú termelési függvény teljesíti a CES-tulajdonságot.*

Definíció. *A* $P : \,]0, +\infty[^n \longrightarrow \,]0, +\infty[$ *termelési függvény* ***Arrow-Chenery-Minhas-Solow-típusú (ACMS-típusú) termelési függvény****, ha*

$$P(x_1, \ldots, x_n) = (\beta_1 x_1^{-\varrho} + \ldots + \beta_n x_n^{-\varrho})^{-\frac{\alpha}{\varrho}},$$

ahol $\beta_1 > 0, \ldots, \beta_n > 0$, $\alpha \neq 0$ *és* $\varrho \neq 0$ *valós számok.*

Megjegyzés. $\varrho \neq -1$ *esetén* $ES_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{1}{1+\varrho}$ $(i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j)$*, így ebben az esetben az ACMS-típusú termelési függvény teljesíti a CES-tulajdonságot.*

Definíció. *Egy* $F :]0,+\infty[^n \longrightarrow]0,+\infty[$ *függvény* ***kvázilineáris****, ha létezik* $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *folytonos, szigorúan monoton függvény, és léteznek olyan* $a_1 \neq 0, \ldots, a_n \neq 0, b$ *valós számok, hogy minden* $(x_1, \ldots, x_n) \in]0,+\infty[^n$ *esetén* $a_1 f(x_1) + \ldots + a_n f(x_n) + b \in f(]0,+\infty[)$ *és*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = f^{-1}(a_1 f(x_1) + \ldots + a_n f(x_n) + b).$$

Tétel. *Egy* $F :]0,+\infty[^n \longrightarrow]0,+\infty[$ *függvény akkor és csak akkor homogén és kvázilineáris, ha* $\alpha = 1$ *értékkel vett CD-típusú termelési függvény vagy ACMS-típusú termelési függvény.*

Definíció. *Egy* $F :]0,+\infty[^n \longrightarrow]0,+\infty[$ *függvény* ***kváziösszeg****, ha léteznek* $g_i :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(i \in \{1,\ldots,n\})$ *folytonos, szigorúan monoton függvények és létezik* $I \subseteq \mathbb{R}$ *pozitív hosszúságú intervallum,* $g : I \longrightarrow]0,+\infty[$ *folytonos, szigorúan monoton függvény, hogy minden* $(x_1,\ldots,x_n) \in]0,+\infty[^n$ *esetén* $g_1(x_1)+\ldots+g_n(x_n) \in I$ *és*

$$F(x_1,\ldots,x_n) = g(g_1(x_1)+\ldots+g_n(x_n)).$$

Tétel. *Egy* $F :]0,+\infty[^n \longrightarrow]0,+\infty[$ *függvény akkor és csak akkor* α*-adfokú homogén* $(\alpha \neq 0)$ *és kváziösszeg, ha CD-típusú termelési függvény vagy ACMS-típusú termelési függvény.*

Lemma. *Legyen* $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *szigorúan monoton függvény és legyenek* $r, q :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *függvények, melyekre teljesül, hogy minden* $\lambda, x \in]0, +\infty[$ *esetén*

$$f(\lambda x) = r(\lambda) f(x) + q(\lambda). \tag{1}$$

Ekkor léteznek olyan $\gamma \neq 0$ *és* δ *valós számok, hogy*

$$f(x) = \gamma \ln x + \delta, \quad r(\lambda) = 1, \quad q(\lambda) = \gamma \ln \lambda,$$

vagy léteznek olyan $\gamma \neq 0$, $\varrho \neq 0$ *és* δ *valós számok, hogy*

$$f(x) = \gamma x^{-\varrho} + \delta, \quad r(\lambda) = \lambda^{-\varrho}, \quad q(\lambda) = \delta(1 - \lambda^{-\varrho}).$$

2. Optimális portfóliók

A piacon két **értékpapír** van, melyek az (r_1, r_2) rendezett párral írhatóak le, ahol:

- r_1 az első, r_2 pedig a második értékpapír hozama a T lejárati időpontban

- r_1, r_2 valószínűségi változók, melyekre

$$\mathsf{P}(-1 \leq r_1) = \mathsf{P}(-1 \leq r_2) = 1$$

portfólió: $\pi = (\beta_1, \beta_2)$ $(\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R})$, ahol β_1 az első, β_2 a második értékpapírba fektetett pénzösszeg

kezdőtőke: $X_0 > 0$, melyet az egyén teljes egészében befektet, azaz $\beta_1 + \beta_2 = X_0$ (feltehető, hogy $X_0 = 1$)

portfólió jövőbeli értéke: X_T^π:

$$X_T^\pi = \beta_1(1 + r_1) + \beta_2(1 + r_2) = \beta_1 r_1 - \beta_1 r_2 + r_2 + 1$$

az egyén **hasznosságfüggvény**e U, melyre feltesszük, hogy

- folytonos
- szigorúan monoton növő
- szigorúan konkáv

cél: portfólió optimalizálása várható hasznosság értelemben

Definíció. *A* $\pi_U^* = (\beta_{1,U}^*, \beta_{2,U}^*)$ ***portfólió optimális****, ha*

$$\mathsf{E}U\left(X_T^{\pi_U^*}\right) = \sup_{\pi \in C_{X_0}} \mathsf{E}U\left(X_T^{\pi}\right),$$

ahol $C_{X_0} = \left\{\pi \mid \pi = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2,\ \beta_1 + \beta_2 = X_0\right\}$

Definíció. *Az* r_1 *valószínűségi változó* ***elsőrendű sztochasztikus dominancia*** *(FSD) értelemben dominálja az* r_2 *valószínűségi változót* ($r_1 \succcurlyeq_{FSD} r_2$)*, ha*

$$F_{r_1}(x) \leq F_{r_2}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tétel. (Hadar–Seo, 1988)
Legyen $U : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *differenciálható, szigorúan konkáv és monoton növekvő hasznosságfüggvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*
(1) $\beta^*_{1,U} \geq \beta^*_{2,U}$ *tetszőleges* r_1 *és* r_2 *független valószínűségi változókra, melyre* $r_1 \succcurlyeq_{FSD} r_2$
(2) az $x \mapsto x \cdot U'(x)$ *függvény monoton növő*

Definíció. *Az* r_1 *valószínűségi változó* ***erős elsőrendű sztochasztikus dominancia*** *(SFSD) értelemben dominálja az* r_2 *valószínűségi változót* $(r_1 \succcurlyeq_{SFSD} r_2)$*, ha*

$$F_{r_1|r_2}(x|y) \leq F_{r_2}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ és } \mathsf{P}_{r_2}\text{-mm. } y \in \mathbb{R}.$$

Tétel. (Gáll–Pap–van Zuijlen, 2005)
Legyen $U : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *differenciálható, konkáv és monoton növő hasznosságfüggvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*
(1) $\beta^*_{1,U} \geq \beta^*_{2,U}$ *tetszőleges* r_1 *és* r_2 *valószínűségi változókra, melyekre* $r_1 \succcurlyeq_{SFSD} r_2$ *és* $\mathsf{E}r_1 < +\infty$, $\mathsf{E}r_2 < +\infty$
(2) az $x \mapsto x \cdot U'(x)$ *függvény monoton növő*

Megjegyzés. $\beta^*_{1,U} \geq \beta^*_{2,U} \iff$

$$\iff \left.\frac{\partial \mathsf{E} U(X_T^\pi)}{\partial \beta_1}\right|_{\beta_1=\frac{1}{2}} = \mathsf{E}(r_1 - r_2) U'\left(\frac{r_1 + r_2}{2} + 1\right) \geq 0$$

Ha (r_1, r_2) abszolút folytonos, akkor

$$\left.\frac{\partial \mathsf{E} U(X_T^\pi)}{\partial \beta_1}\right|_{\beta_1=\frac{1}{2}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - y) U'\left(\frac{x + y}{2} + 1\right) f_{r_1,r_2}(x, y)\, dx dy$$

Exponenciális hasznosságfüggvény, 2-dimenziós egyenletes eloszlás

Legyen $U(x) = ce^{dx} + g$ $(c < 0, d < 0, g \in \mathbb{R})$.

Legyen $(r_1, r_2) \sim \text{Uniform}([a_1, a_2] \times [b_1, b_2])$ $(a_1 < a_2,\ b_1 < b_2)$

$$f_{r_1,r_2}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)} & \text{ha } (x, y) \in [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ekkor

$$\left.\frac{\partial \mathsf{E} U(X_T^\pi)}{\partial \beta_1}\right|_{\beta_1=\frac{1}{2}} = \frac{4ce^d}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)d} \Bigg((a_2 - b_2)e^{d\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right)} -$$
$$-(a_1 - b_2)e^{d\left(\frac{a_1+b_2}{2}\right)} - (a_2 - b_1)e^{d\left(\frac{a_2+b_1}{2}\right)} + (a_1 - b_1)e^{d\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)} \Bigg)$$

Hadar-Seo tételéből adódó esetek:

I. eset: ha $a_1 = b_1$

$\beta^*_{1,U} \geq \beta^*_{2,U} \Longleftrightarrow a_2 \geq b_2$

$\beta^*_{1,U} \leq \beta^*_{2,U} \Longleftrightarrow a_2 \leq b_2$

II. eset: ha $a_2 = b_2$

$\beta^*_{1,U} \geq \beta^*_{2,U} \Longleftrightarrow a_1 \geq b_1$

$\beta^*_{1,U} \leq \beta^*_{2,U} \Longleftrightarrow a_1 \leq b_1$

III. eset: ha $a_2 \leq b_1$

$\beta^*_{1,U} \leq \beta^*_{2,U}$

IV. eset: ha $b_2 \leq a_1$

$\beta^*_{1,U} \geq \beta^*_{2,U}$

V. eset: ha $\frac{a_1+a_2}{2} = \frac{b_1+b_2}{2}$
$\beta^*_{1,U} \geq \beta^*_{2,U} \iff a_1 \geq b_1$
$\beta^*_{1,U} \leq \beta^*_{2,U} \iff a_1 \leq b_1$

Bizonyítás. Legyen $\frac{a_1+a_2}{2} = \frac{b_1+b_2}{2} = A$.

$a_1 = A - \delta, a_2 = A + \delta, b_1 = A - \varepsilon, b_2 = A + \varepsilon$ $(\varepsilon > \delta > 0)$ és $\varepsilon + \delta = u$, $\varepsilon - \delta = v$ helyettesítésekkel adódik:

$$\left.\frac{\partial \mathsf{E} U(X_T^\pi)}{\partial \beta_1}\right|_{\beta_1=\frac{1}{2}} \geq 0 \iff \frac{\mathrm{sh} u}{u} \geq \frac{\mathrm{sh} v}{v}$$

$x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh} x}{x}$ függvény szigorúan monoton növekvősége miatt ez mindig fennáll

A maradék esetekben implicit formában adhatóak meg a megoldások:

VI. eset: ha $b_1 < a_1 < a_2 < b_2$ és $\frac{a_1+a_2}{2} \neq \frac{b_1+b_2}{2}$

VII. eset: ha $a_1 < b_1 < b_2 < a_2$ és $\frac{a_1+a_2}{2} \neq \frac{b_1+b_2}{2}$

VIII. eset: ha $a_1 < b_1 < a_2 < b_2$

IX. eset: ha $b_1 < a_1 < b_2 < a_2$

Azonnali kamatláb (spot kamatláb): a jelenben rögzített kamatláb, mely egy jelenben nyújtott kölcsönre vonatkozik

Határidős kamatláb (forward kamatláb): a jelenben rögzített kamatláb, mely egy jövőben nyújtott kölcsönre vonatkozik

Kamatszelvény nélküli kötvény (zero coupon bond): formailag nem kamatozó kötvény: a kibocsátás a névérték alatt történik, a visszafizetés névértéken, a futamidő végén egy összegben

Jelölés. az $f_{k,l}$ a határidős kamatláb, a $[k+l, k+l+1]$ időperiódusra vonatkozó kamatláb $(k, l \in \mathbb{Z}_+)$

Jelölés. a k időpontbeli l lejárati idővel rendelkező zero coupon bond ára $P_{k,l}$ $(0 \leq k \leq l)$:

$$P_{k,l} = \exp\left(-\sum_{j=0}^{l-k-1} f_{k,l}\right),$$

ahol $P_{k,k} = 1$

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ valószínűségi mező, melyen $\{\mathcal{F}_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ filtráció, amire:

$$\mathcal{F} = \sigma\left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{F}_k\right)$$

- $f_{0,j}$ kezdeti értékek $(j \in \mathbb{Z}_+)$ $\mathcal{F}_0$-mérhetőek (mivel ezek már ismertek a 0 időpontban)

- a későbbi időpontokhoz tartozó határidős kamatlábakat az alábbi egyenlet adja meg:

$$f_{k+1,j} = f_{k,j} + \alpha_{k,j} + \beta_{k,j}(S_{k+1,j} - S_{k,j}) \quad (k, j \in \mathbb{Z}_+),$$

ahol $\{S_{k,l}\}_{k,l\in\mathbb{Z}_+}$ véletlen mező, azaz $S_{k,l}$ valószínűségi változók ($k, l \in \mathbb{Z}_+$), hogy $\{S_{k,l}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ adaptált folyamat az $\{\mathcal{F}_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ filtrációra vonatkozóan, továbbá $\{\alpha_{k,j}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ és $\{\beta_{k,j}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ adaptált folyamatok az $\{\mathcal{F}_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ filtrációra vonatkozóan

Jelölés. $\Delta_1 S_{k,j} = S_{k+1,j} - S_{k,j}$ $(k, j \in \mathbb{Z}_+)$

Feltesszük, hogy létezik egy **sztochasztikus piaci diszkont faktor folyamat** $\{M_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, melyre:

- $M_0 = 1$

- tegyük fel, hogy $\phi_{k,j}$ olyan $\mathcal{F}_k$-mérhető $(k \in \mathbb{Z}_+)$ valószínűségi változók, hogy:

- a $\sum_{j=0}^{+\infty} \phi_{k,j}\Delta_1 S_{k,j}$ sor sztochasztikusan konvergens, továbbá

$$\mathsf{E}\left(\exp\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \phi_{k,j}\Delta_1 S_{k,j}\right)\right) < +\infty \quad (k \in \mathbb{Z}_+)$$

Legyen

$$M_{k+1} = M_k \frac{\exp\left(-r_k + \sum_{j=0}^{+\infty} \phi_{k,j} \Delta_1 S_{k,j}\right)}{\mathsf{E}\left(\exp\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \phi_{k,j} \Delta_1 S_{k,j}\right) | \mathcal{F}_k\right)} \qquad (k \in \mathbb{Z}_+)$$

Állítás. *A piac arbitrázsmentes pontosan akkor, ha* $\{M_k P_{k,l}\}_{0 \le k \le l}$ P-*martingál minden* $l \in \mathbb{Z}_+$ *esetén.*

- legyen $\{\eta_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{Z}_+}$ fehér zaj folyamat

- legyen $\mathcal{F}_k = \sigma\left(\eta_{i,j} | i \leq k, j \in \mathbb{Z}_+\right)$

AR modell: legyen $\rho \in \mathbb{R}$ konstans

$$S_{k,l} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} \rho^{l-j}\eta_{i,j} \qquad (k, l \in \mathbb{Z}_+)$$

Ekkor $S_{k+1,l+1} = S_{k,l+1} + \rho S_{k+1,l} - \rho S_{k,l} + \eta_{k+1,l+1}$, amiből

$$\Delta_1 S_{k,l+1} = \rho\Delta_1 S_{k,l} + \eta_{k+1,l+1}$$

Amiből: $\{\Delta_1 S_{k,l}\}$ $AR(1)$ folyamat ρ együtthatóval

A továbbiakban feltesszük az alábbiakat:

- $\{\eta_{i,j} : i, j \in \mathbb{Z}_+\}$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ valószínűségi mezőn

- $\mathcal{F}_k = \sigma\left(\eta_{i,j} | 0 \leq i \leq k, j \in \mathbb{Z}_+\right)$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$

- az $\{S_{k,l} : k, l \in \mathbb{Z}_+\}$ meghajtó folyamat AR(1) típusú modellt követi

- $\{\alpha_{k,l} : l \in \mathbb{Z}_+\}$ $\mathcal{F}_k$-mérhető valószínűségi változók $(k \in \mathbb{Z}_+)$

- $f_{0,l} \in \mathbb{R}$

- $\beta_{k,l} = \beta$ $(k, l \in \mathbb{Z}_+)$, ahol $\beta \in \mathbb{R}\{0\}$, azaz a volatilitás determinisztikus

Ekkor a diszkrét határidős kamatlábakat leíró egyenlet:

$$f_{k+1,l} = f_{k,l} + \alpha_{k,l} + \beta \Delta_1 S_{k,l} \quad (k, l \in \mathbb{Z}_+)$$

Tétel. *Tegyük fel, hogy a diszkrét határidős kamatlábak rendszerét az előző egyenlet írja le továbbá, hogy a* ρ *paraméter ismert. Legyenek* $K, L \in \mathbb{N}$, *és legyen adva az* $\{f_{k,l} : 1 \leq k \leq K, 0 \leq l \leq L\}$ *minta. Ekkor a volatilitás* (β) *maximumlikelihood becslése:*

$$\widehat{\beta_{K,L}} = \sqrt{\frac{-B_{K,L} + \sqrt{B_{K,L}^2 + 4A_{K,L}C_{K,L}}}{2A_{K,L}}},$$

ahol:

$$A_{K,L} = \frac{K}{4} \sum_{l=0}^{L-1} \left(\sum_{i=0}^{2l} \rho^i \right)^2 + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{k} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{2L+2j} \rho^i \right)^2$$

$$B_{K,L} = K\,(L+1)\,, \quad C_{K,L} = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=0}^{L-1} g_{k,l}^2 + \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{k} \widetilde{g}_{k,L}^2,$$

ahol:

$$g_{k,l} = \begin{cases} f_{k,l} - f_{k-1,l+1} - \rho\left(f_{k,l-1} - f_{k-1,l}\right) & ha\ k,l \geq 1 \\ f_{k,0} - f_{k-1,1} & ha\ k \geq 1 \text{és}\ l = 0 \end{cases}$$

$$\widetilde{g}_{k,L} = f_{k,L} - f_{0,k+L} - \rho\left(f_{k,L-1} - f_{0,k+L-1}\right) \quad (k, L \geq 1)$$

Tétel. *Legyen adva a* $\left\{ f_{k,l}^{(n)} : 1 \leq k \leq K_n, 0 \leq l \leq L \right\}$*, ahol* $K = K \cdot n$ *minta. Legyen* β_n *maximumlikelihood becslése a minta alapján* $\widehat{\beta_{K_n,L}}$*, továbbá tegyük fel, hogy* $\rho_n = 1 + \frac{\gamma}{n}$*, ahol* $\gamma \in \mathbb{R}$ *és* $\liminf_{n\to\infty} |\beta_n| > 0$*. Ekkor:*

$$n \cdot \beta_n^{-1} \left(\widehat{\beta_{K_n,L}^2} - \beta_n^2 \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, 2\sigma\right),$$

ahol

$$\frac{1}{\sigma^2} = K \cdot \int_0^L \left(\int_0^{2t} e^{\gamma v}\, dv \right)^2 \, dt + \int_0^K \frac{1}{s} \left(\int_0^s \int_0^{2L+2u} e^{\gamma v}\, dv\, du \right)^2 \, ds$$

4. Függvényegyenletek kvaterniókra

$\mathbb{H} = \{r + v_1 i + v_2 j + v_3 k \mid r, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}\}$ a kvaterniók ferdetestje, ha $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Definíció. *Az $r + v_1 i + v_2 j + v_3 k$ kvaternió tisztán képzetes, ha $r = 0$.*

Megjegyzés. *Egy tisztán képzetes $v_1 i + v_2 j + v_3 k$ kvaterniónak megfeleltethető a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ $\mathbb{R}^3$-beli vektor.*

Motiváció:

$(r+\mathbf{v})(s+\mathbf{w}) = (rs - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle) + (s\mathbf{v} + r\mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}) \quad (r, s \in \mathbb{R}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3)$,

és tisztán képzetes kvaterniókra:

$$\mathbf{v}\mathbf{w} = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \mathbf{v} \times \mathbf{w} \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3).$$

Tétel. *Az* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}$ *megoldása az*

$$f(r,\mathbf{v})f(s,\mathbf{w}) = -\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle + f(rs, s\mathbf{v}+r\mathbf{w}+\mathbf{v}\times\mathbf{w}) \quad (r,s\in\mathbb{R}, \mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3)$$

egyenletnek akkor és csak akkor, ha

$$\begin{aligned} f\left(r,(v_1,v_2,v_3)\right) &= r + (a_1v_1 + b_1v_2 + (a_2b_3 - a_3b_2)v_3)i + \\ &+ (a_2v_1 + b_2v_2 + (a_3b_1 - a_1b_3)v_3)j + \\ &+ (a_3v_1 + b_3v_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)v_3)k, \end{aligned}$$

ahol $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3$ *merőleges egységvektorok.*

Tétel. *A* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}$ *megoldása a*

$$g(\mathbf{v})g(\mathbf{w}) = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + g(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3)$$

egyenletnek akkor és csak akkor, ha

$$\begin{aligned} g\left((v_1, v_2, v_3)\right) &= (a_1 v_1 + b_1 v_2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) v_3) i + \\ &+ (a_2 v_1 + b_2 v_2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) v_3) j + \\ &+ (a_3 v_1 + b_3 v_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) v_3) k, \end{aligned}$$

ahol $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ *merőleges egységvektorok.*